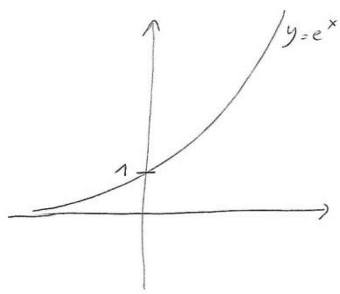
La fonction exponentielle et la fonction logarithme

1. La fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien

Il existe une et une seule fonction f telle que $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x). \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On appelle cette fonction la fonction exponentielle et on la note $x \mapsto \exp(x)$ ou encore $x \mapsto e^x$.
Voici un schéma de sa courbe représentative qui permet de résumer cette fonction:



Elle a les propriétés suivantes: le domaine de $x \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

$e^0 = 1$

$(e^x)' = e^x$

$x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Voici son tableau de signe:

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de e^x		$+$	

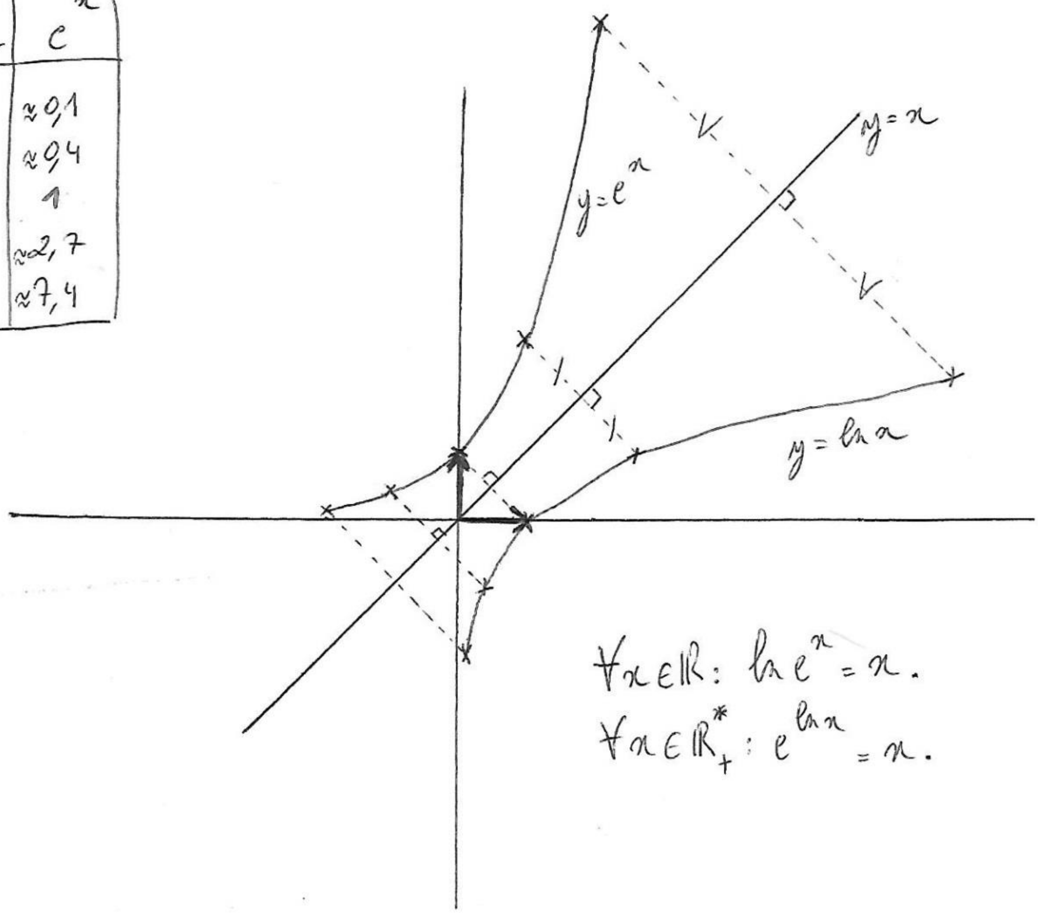
Voici son tableau de variation:

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		

On appelle fonction logarithme népérien, la réciproque de la fonction exponentielle. On la note $x \mapsto \ln x$.

$x \mapsto \ln x$ est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto e^x$.

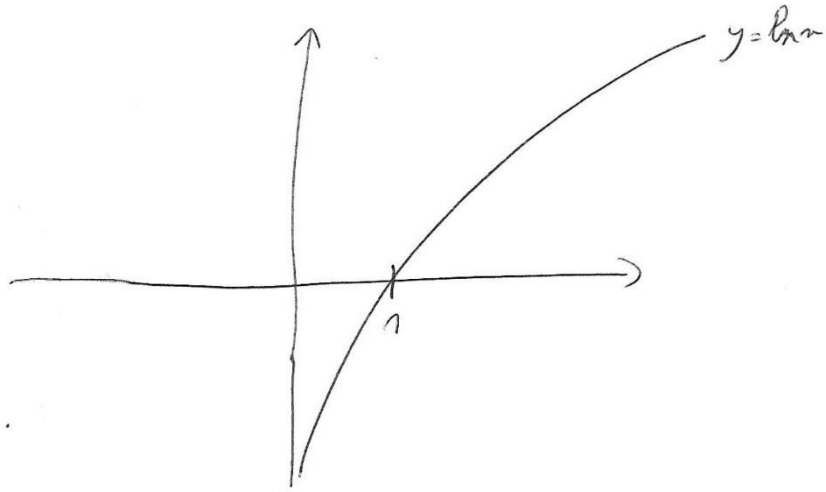
x	e^x
-2	$\approx 0{,}1$
-1	$\approx 0{,}4$
0	1
1	$\approx 2{,}7$
2	$\approx 7{,}4$



$\forall x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : e^{\ln x} = x.$

Voici un schéma de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$ qui permet de résumer cette fonction:



Elle a les propriétés suivantes: le domaine de $x \mapsto \ln x$ est $\mathbb{R}_+^*$

$\ln 1 = 0$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Voici son tableau de signe:

x	0		1		$+\infty$
signe de $\ln x$	||	$-$	0	$+$	

Voici son tableau de variation:

x	0		$+\infty$
$\ln x$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Propriété

Il existe une fonction f telle que $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x). \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Démonstration

Existence de la fonction exponentielle: « http://tsmaths.free.fr/Prepa/existenceexpo.pdf ».

c.q.f.d.

Propriété

Soi une fonction f telle que $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x). \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Démonstration

Soit la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) = 0$.
La fonction ϕ est donc contante.
Mais $\phi(0) = f(0) \times f(-0) = 1$.
Par conséquent $\phi(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a donc : $f(x) \times f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
$f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c.q.f.d.

Propriété

Il existe une et une seule fonction f telle que $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x). \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Démonstration

Soit une fonction f telle que $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x). \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Soit une fonction g telle que $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(x). \\ g(0) = 1 \end{cases}$

g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)} = 0.$$

La fonction $\frac{f}{g}$ est donc constante sur $\mathbb{R}$.
$\frac{f}{g} = C$ pour un réel C.
Comme $f(0) = g(0) = 1$, $C = 1$.
Conclusion : $f = g$.

c.q.f.d.

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$.
Soient deux réels a et c tels que $a < c$.
Supposons que $\exp(a) \times \exp(c) < 0$.
$\exp(a)$ et $\exp(c)$ sont de signes contraire.
La fonction exponentielle est continue sur $[a; c]$ car elle y est dérivable.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $b \in]a; c[$ tel que $\exp(b) = 0$.
Mais $\exp(b) \neq 0$.
On a une contradiction et donc l'hypothèse « $\exp(a) \times \exp(c) < 0$ » est fausse.
La fonction exponentielle est donc toujours du même signe.
Comme $\exp(0) = 1$, on a $\exp(x) > 0$ pour tout réel x.
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Comme $exp' = exp$, le signe de la dérivée de la fonction exponentielle est le même que celui de la fonction exponentielle ; donc $\exp'(x) > 0$ pour tout réel x.
La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c.q.f.d.

Propriété

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- ❖ $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

  $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- ❖ $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- ❖ $(\exp(x))^p = \exp(p\,x)$, $p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration

❖ Soit y un réel.

Soit la fonction $f_y(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$ définie pour tout réel x.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f_y'(x) = (\exp(x+y))' \times \exp(-x) + \exp(x+y) \times (\exp(-x))'$$
$$f_y'(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp(-x)$$
$$f_y'(x) = 0.$$

La fonction f_y est donc constante sur $\mathbb{R}$ et comme $f_y(0) = \exp(y)$, on a $f_y(x) = \exp(y)$.

Donc, $\exp(x+y) \times \exp(-x) = \exp(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\exp(x+0) \times \exp(-x) = \exp(0)$

$\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ car pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$

$\exp(x+y) \times \frac{1}{\exp(x)} = \exp(y)$

$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

❖ $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

❖ Initialisation ($n = 0$) : $(\exp(x))^0 = 1 = \exp(0\,x)$.

Hérédité : Soit un entier naturel n.

Supposons que $(\exp(x))^n = \exp(n\,x)$.

$(\exp(x))^{n+1} = (\exp(x))^n \times \exp(x) = \exp(n\,x) \times \exp(x) = \exp(n\,x + x)$

$\exp\big((n+1)\,x\big)$.

Conclusion : par récurrence, $(\exp(x))^n = \exp(n\,x)$ pour tout entier naturel n.

Supposons que $p < 0$.

Posons $p = -n$.

$(\exp(x))^p = (\exp(x))^{-n} = \frac{1}{(\exp(x))^n} = \frac{1}{\exp(n\,x)} = \frac{1}{\exp(-p\,x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(p\,x)}} = \exp(p\,x)$.

Conclusion : $(\exp(x))^p = \exp(p\,x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

c.q.f.d.

Propriété

- $e^x > x$, pour tout réel x ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Démonstration

- Soit la fonction $f(x) = e^x - x$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$.
  Comme $e^0 = 1$ et $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, on a :
  Sur $]-\infty; 0[$: $e^x < 1$
  $e^x - 1 < 0$
  $f'(x) < 0$.
  Sur $]0; +\infty[$: $1 < e^x$
  $0 < e^x - 1$
  $0 < f'(x)$.
  On a : f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$
  f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
  $f(0) = 1$.
  Alors, pour tout réel x: $f(x) \geq 1$
  $f(x) > 0$
  $e^x - x > 0$
  $e^x > x$.
- Comme $e^x > x$, pour tout réel x
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
  alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
  on a par le théorème de la limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.
  Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$,
  on a par le théorème de la limite d'une opération : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$.
  Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 0$ donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
  $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ en posant $f(x) = e^x$
  $= f'(0) = e^0$ car $f'(x) = e^x$
  $= 1$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour tout réel $x > 0$:

$$e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$$
$$e^{\frac{x}{2}} > \frac{(\sqrt{x})^2}{2}$$
$$e^{\frac{x}{2}} > \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{x}}{2}$$
$$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\sqrt{x}}{2}$$
$$\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$$
$$\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{(\sqrt{x})^2} > \frac{(\sqrt{x})^2}{2^2}$$
$$\frac{e^{2\frac{x}{2}}}{x} > \frac{x}{4}$$
$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}.$$

Comme $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$, pour tout réel $x > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$

alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ donne la forme indéterminée $\infty \times 0$.

Pour tout réel $x < 0$: $xe^x = -(-x)e^{-(-x)} = \frac{-(-x)}{e^{(-x)}} = \frac{-1}{\frac{e^{(-x)}}{(-x)}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$,

on a par le théorème de la limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{(-x)}}{(-x)} = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{(-x)}}{(-x)} = +\infty$

on a par le théorème de la limite d'une opération : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{e^{(-x)}}{(-x)}} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

c.q.f.d.

Propriété

Le domaine de la fonction logarithme népérien est $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
La fonction exponentielle est toujours plus grande que 0, alors l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle est inclue ou égale à $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow 0 - \epsilon < e^x < 0 + \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow 0 < e^x < \epsilon$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow e^x > A$$

Il existe donc un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{x_0} < y$.
Il existe donc un $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{x_1} > y$.
La fonction exponentielle est continue sur $[x_0; x_1]$ car elle est dérivable sur $[x_0; x_1]$.
Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $x \in [x_0; x_1]$ tel que $e^x = y$.
Donc chaque $y \in \mathbb{R}_+^*$ possède un antécédent par la fonction exponentielle.
L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle est égale à $\mathbb{R}_+^*$.
Alors le domaine de la fonction logarithme népérien est $\mathbb{R}_+^*$.

c.q.f.d.

Propriété

$\ln 1 = 0$.

Démonstration

$e^0 = 1$.
La fonction ln est la bijection réciproque de la fonction exponentielle et donc, $\ln 1 = 0$.

c.q.f.d.

Propriété

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration

On a le théorème :

Si f est une bijection de A sur B
et f est dérivable en $x_0 \in A$
et $f'(x_0) \neq 0$
et f^{-1} est la bijection réciproque de f
et $f(x_0) = y_0$

Alors, f^{-1} est dérivable en y_0
et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 tel que $e^{x_0} = y_0$.

On a : la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$ est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
$e^{x_0} \neq 0$
$x \mapsto \ln x$ est la bijection réciproque $x \mapsto e^x$
$e^{x_0} = y_0$

Alors, $x \mapsto \ln x$ est dérivable en y_0
$\ln'(y_0) = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}$.

c.q.f.d.

Propriété

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

- ❖ $\ln(x\, y) = \ln(x) + \ln(y)$
- ❖ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- ❖ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- ❖ $\ln x^p = p \ln x \;, p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

❖ $e^{\ln(x\, y)} = x\, y = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$

$e^{\ln(x\, y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x\, y) = \ln(x) + \ln(y)$

car la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\ln(x\, y) = \ln(x) + \ln(y)$.

❖ $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$

$$\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\ln x + \ln \frac{1}{x} = 0$$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

❖ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

❖ Initialisation $(n = 0)$: $\ln x^0 = \ln 1 = 0 = 0 \ln x$.

Hérédité : Soit un entier naturel n.

Supposons que $\ln x^n = n \ln x$.

$\ln x^{n+1} = \ln(x^n\, x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n \ln(x) + \ln(x) = (n+1) \ln x$.

Conclusion : par récurrence, $\ln x^n = n \ln x$ pour tout entier naturel n.

Supposons que $p < 0$.

Posons $p = -n$.

$\ln x^p = \ln x^{-n} = \ln \frac{1}{x^n} = -\ln x^n = -\ln x^{-p} = -(-p) \ln x = p \ln x$.

Conclusion : $\ln x^p = p \ln x$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

c.q.f.d.

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad ln'x = \frac{1}{x} > 0$.

La fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c.q.f.d.

Propriété

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

Démonstration

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x > A \Rightarrow \ln x > B$.
  Soit $B \in \mathbb{R}$.
  $\ln x > B \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln x} > e^B$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  $\Leftrightarrow \quad x > e^B$.
  Posons $A = e^B$. On a donc $\ln x > B \Leftrightarrow x > A$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  Supposons que $x > A$. Alors, $\ln x > B$.
  $x > A \Rightarrow \ln x > B$
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x > A \Rightarrow \ln x > B$
  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x > A \Rightarrow \ln x > B$
  $\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x > A \Rightarrow \ln x > B$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- Pour tout $x > 0$: $\ln x = -(-\ln x) = -\ln \frac{1}{x}$.
  Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,
  on a par le théorème de la limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty$.
  Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} -1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty$
  on a par le théorème de la limite d'une opération : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln \frac{1}{x} = -\infty$.
  $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} -\ln \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
  $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$ en posant $f(x) = \ln(1+x)$
  $= f'(0) = \frac{1}{1+0}$ car $f'(x) = \frac{1}{1+x}$
  $= 1$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour tout $x > 1$: $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln x}}{\ln x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$,

on a par le théorème de la limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = +\infty$

on a par le théorème de la limite d'une opération : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{\ln x}}{\ln x}} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

❖ Une autre preuve n'utilisant pas $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Soit la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$.

$f(1) = \ln 1 - 2\sqrt{1} = 0 - 2 = -2$.

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{x} - 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$.

Si $x > 1$ alors $\sqrt{x} > 1$

$-\sqrt{x} < -1$

$1 - \sqrt{x} < 0$

$\frac{1-\sqrt{x}}{x} < 0$ car $x > 0$

$f'(x) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur$]1; +\infty[$.

Par conséquent: $\forall x > 1$: $f(x) < -2$

$f(x) < 0$

$\ln x - 2\sqrt{x} < 0$

$\ln x < 2\sqrt{x}$

$\frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ car $x > 0$.

$\forall x > 1$: $0 < \ln x$

$0 < \frac{\ln x}{x}$ car $x > 0$.

$\forall x > 1$: $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

❖ $\lim_{x\to 0} x \ln x$ donne la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Pour tout $x > 0$: $x \ln x = x\big(-(-\ln x)\big) = x\left(-\ln \frac{1}{x}\right) = -x \ln \frac{1}{x} = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,

on a par le théorème de la limite d'une fonction composée : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$

Comme $\lim_{x\to 0^+} -1 = -1$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$

on a par le théorème de la limite d'une opération : $\lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$

$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0} -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$

c.q.f.d.

2. Dérivées

Rappel:

$(ku)' = k\,u' \quad (k \in \mathbb{R})$
$(k)' = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$
$(x^a)' = ax^{a-1}$
$(u+v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Exercice 1

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur l'ensemble $\mathcal{D}$.

1. $f(x) = 3xe^x - 1$ $\quad\mathcal{D} = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x\ln x - x - 2$ $\quad\mathcal{D} =]0; +\infty[$
3. $f(x) = x^2 + xe^x$ $\quad\mathcal{D} = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ $\quad\mathcal{D} =]0; +\infty[$
5. $f(x) = \frac{1-2\ln x}{2x}$ $\quad\mathcal{D} =]0; +\infty[$
6. $f(x) = \ln x - x + 1$ $\quad\mathcal{D} =]0; +\infty[$
7. $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{2x+1}$ $\quad\mathcal{D} =]0; +\infty[$
8. $f(x) = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$ $\quad\mathcal{D} =]0; +\infty[$
9. $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$ $\quad\mathcal{D} = \mathbb{R}$
10. $f(x) = -1 + (1-x)e^x$ $\quad\mathcal{D} = \mathbb{R}.$

Solutions

1. $f'(x) = 3e^x(1+x)$
2. $f'(x) = \ln x$
3. $f'(x) = 2x + e^x + xe^x$
4. $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$
5. $f'(x) = \frac{2\ln x - 3}{2x^2}$
6. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
7. $f'^{(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(2x+1)^2}$
8. $f'(x) = (2x-2)(\ln x - 1)$
9. $f'(x) = (2x^2 + x - 3)e^x$
10. $f'(x) = -xe^x.$

3. Limites

Astuce: la fonction $x \mapsto e^x$
est "plus forte" que la fonction $x \mapsto x^\alpha$
qui est "plus forte" que la fonction $x \mapsto ln\, x$
avec $\alpha > 0$.

Calculer les limites suivantes.

Exercice 2

$\lim\limits_{x\to 2} x\, ln\, x + e^x - x - 3$

Solution

$\lim\limits_{x\to 2} x\, ln\, x + e^x - x - 3 = 2\, ln\, 2 + e^2 - 2 - 3 = 2\, ln\, 2 + e^2 - 5$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to 3} x\, ln\, x + e^x - x - 2$
b) $\lim\limits_{x\to e} x^3\, ln\, x - x - 2$
c) $\lim\limits_{x\to 1} x\, ln\, x - \frac{1}{x} - 2$
d) $\lim\limits_{x\to \ln 7} e^x + x - 2$
e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{2+3lnx}$

Solution

a) $3\, ln\, 3 + e^3 - 5$
b) $e^3 - e - 2$
c) -3
d) $5 + \ln 7$
e) 0

Exercice 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{2+3lnx}$$

Solution

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{2+3\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x-3}^{-3}}{\underbrace{\underbrace{2}_{2}+\underbrace{\underbrace{3}_{3}\underbrace{\ln x}_{-\infty}}_{-\infty}}_{-\infty}} = 0$$

Remarque : Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{x-3}{2+3\ln x}$ est $]0; e^{-\frac{2}{3}}[\cup]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$ et donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{2+3\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-3}{2+3\ln x}.$$

Exercice 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{5-x}{-2+7lnx}$$

Solution

0

Exercice 6

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+3lnx}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-3lnx}{x+3}$

Solution

a et b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+3\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\overset{2}{2}+\overbrace{\overset{3}{3}\,\overset{-\infty}{\ln x}}^{-\infty}}^{-\infty}}{\underset{0^+}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-3\ln x}{x-3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\overset{2}{2}-\overbrace{\overset{3}{3}\,\overset{-\infty}{\ln x}}^{-\infty}}^{+\infty}}{\underset{3}{x+3}}=+\infty$$

Exercice 7

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+3lnx}{-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-3lnx}{-3-x}$

Solution

a) $+\infty$

b) $-\infty$